# Control: Lec 2

## Root locus

stability

**Algebric methods**

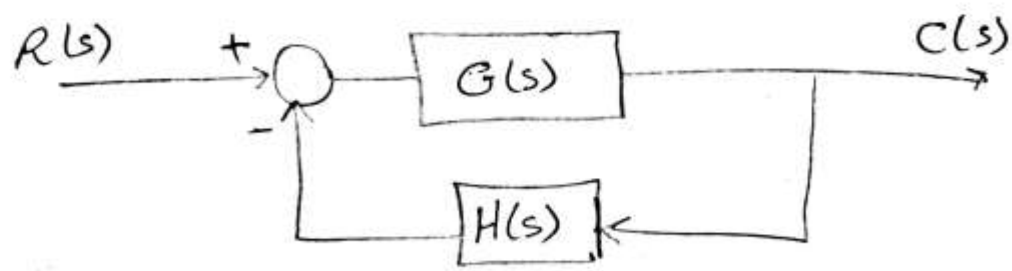
↳ Routh array

**Graphical methods**

* Root locus
* Bode diagram
* Polar plot

~~Root locus the locus of roots of ch. equation~~

~~(Poles)~~




$$C.L.T.F \equiv \text{Closed loop transfer function} = \frac{G(s)}{1 + GH(s)}$$

$$O.L.T.F = GH(s)$$

ch. eqn:- $\boxed{1 + GH(s) = 0}$

## Root locus

The locus of the roots of ch. equation (Poles) that depend on variable Parameter (K) that takes Positive values ($0 \to \infty$)

**Ex:** given $O.L.T.F = \dfrac{K}{s(s+1)}$

Sol

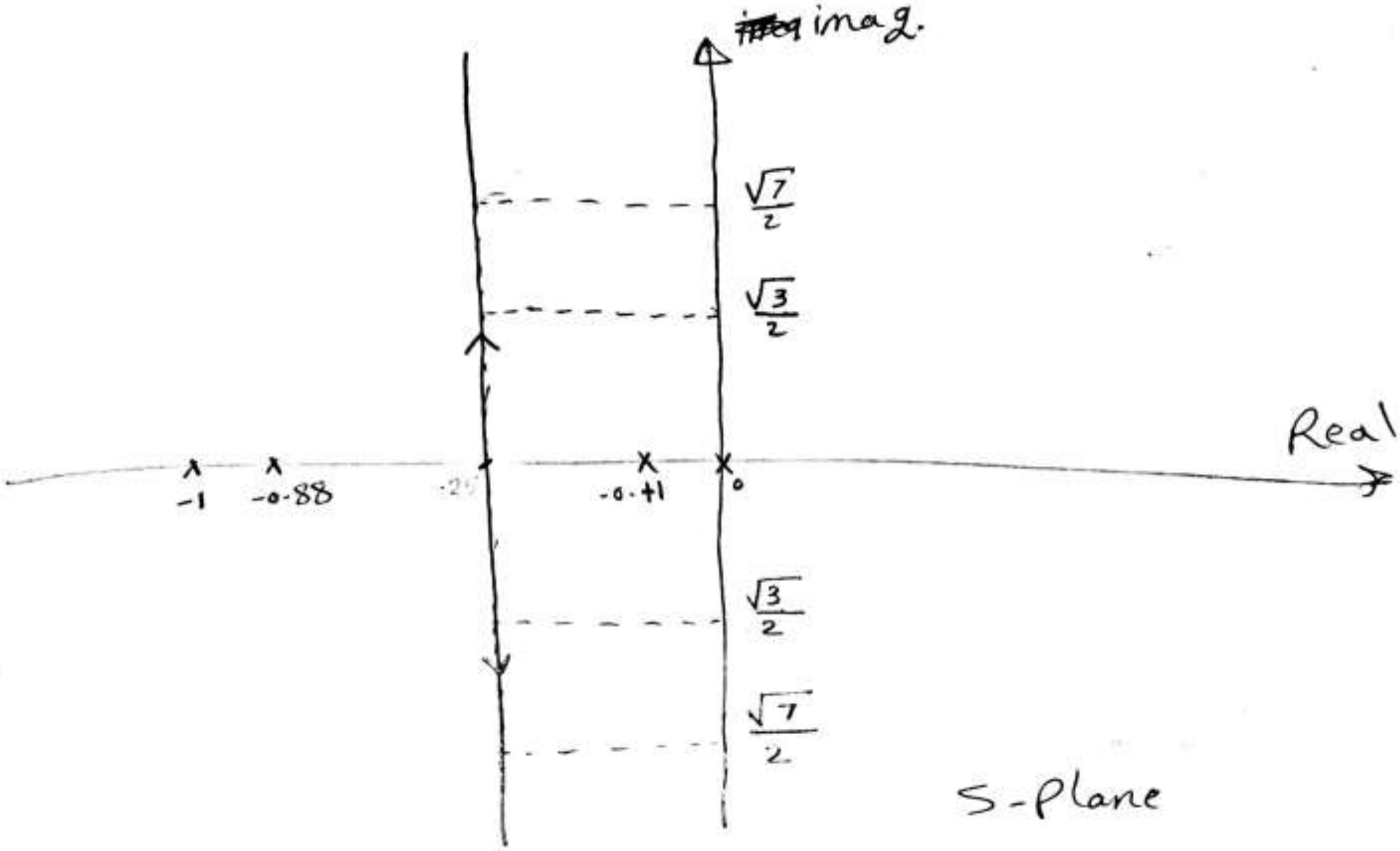
ch. eq $\quad 1 + G\,H(s) = 0$

$$1 + \frac{K}{s(s+1)} = 0$$

$$s(s+1) + K = 0 \Longrightarrow \boxed{s^2 + s + K = 0} \quad \text{ch. eqn}$$

| K | 0 | 0.1 | 0.25 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $s_{1,2}$ | $0, -1$ | $-0.11, -0.08$ | $\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}$ | $\frac{-1}{2} \pm J\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{-1}{2} \pm J\frac{\sqrt{7}}{2}$ |

$$s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4K}}{2}$$




<u>Ex:</u> $$GH(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+3)(s+4)}$$

* Draw the root locus and find the range of K that make the system stable.

<u>Sol</u>

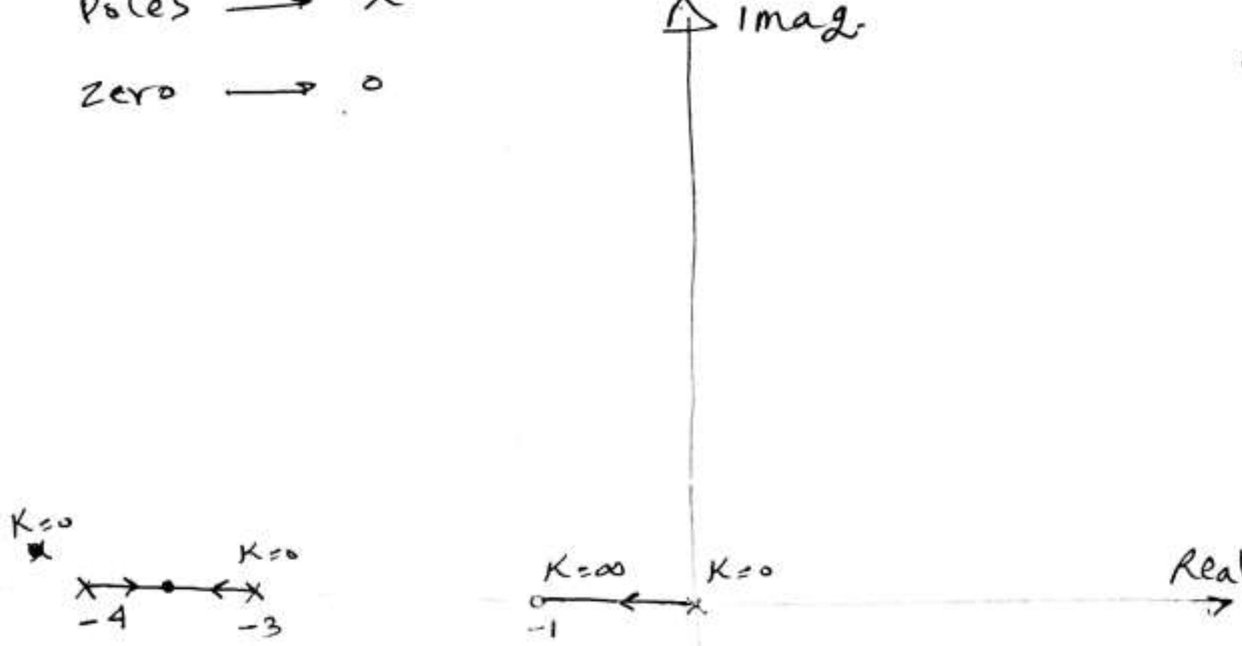
① O.L Poles ⇒ 3 Poles (0, -3, -4)

O.L zeros ⇒ 1 zero -1

② s-Plane

Poles → x

zero → o




ال (zero) ثابت دائماً
التغير في K يغير من (Poles)
كان الفترة من 0 ← -1
، -3 ← -4

← السهم من 0 ← -1 ، -3 ← -4 يمثل
حركة ال (Pole)

end at Zero ⇒ $\overset{K=\infty}{o}$

Poles ⇒ $\overset{K=0}{X}$

← إحنا بنفترض إننا شغالين بال (open-loop) بس حقيقة
هيا بالمثل ال (closed-loop) عند K=0

$$\frac{K(s+1)}{s(s+3)(s+4)} \Rightarrow 1+\frac{K(s+1)}{s(s+3)(s+4)} = s(s+3)(s+4) + K(s+1) = 0$$

## (3) Real Part :-

← هيا الفترة على يمينك عدد ال Pole ، zero فردى
أو خليط منهم.

← في ال (s-plane) منطقة ال (Real-Part)
تكون من 0 ← -1 ، -3 ← -4

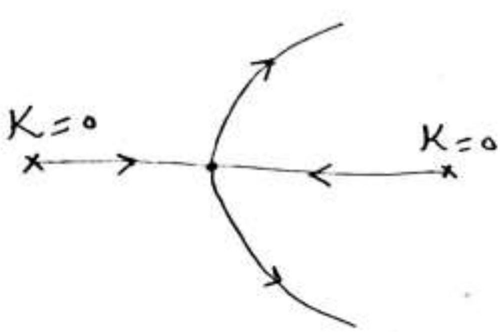
Real Part → 0 → -1
→ -3 → -4

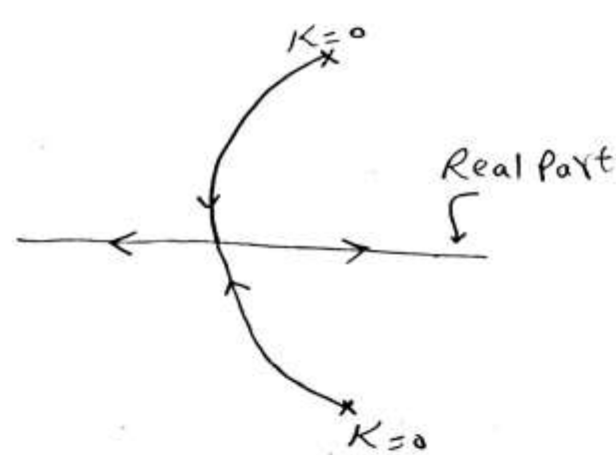
## (4) Breaking Point :-

← نقطة تقع على ال (Real Part) , ال K عندها تكون أكبر ما يمكن
و أقل ما يمكن

Breaking Point

| Break away point | Break in point نقطة تلاق |
|---|---|
| $K_{max}$ | $K_{min}$ |



## ③ Real Part :-

ـــ هيا الفترة على يمينك عدد ال Pole ، zero فردى
أو خليط منهم.

ـــ في ال (s-plane) منطقة ال (Real-Part)
تكون من 0 ← -1 ، -3 ← -4

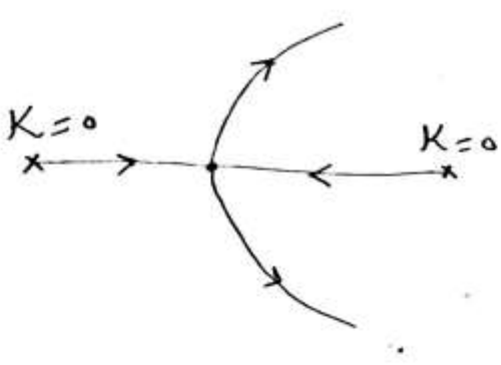
Real Part → 0 → -1
→ -3 → -4

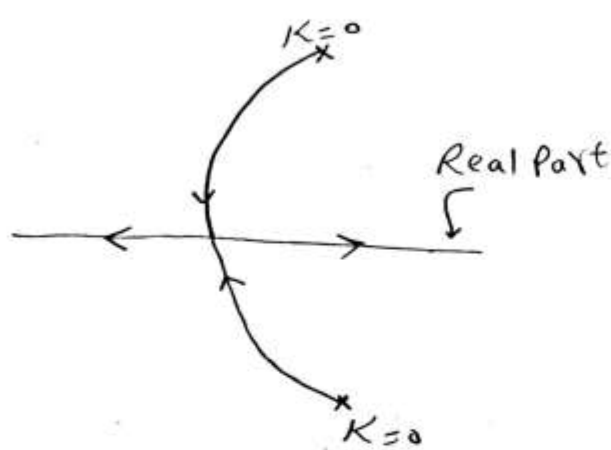
## ④ Breaking Point :-

ـــ نقطة تقع على ال (Real Part) ، ال K عندها تكون أكبر ما يمكن
و أقل ما يمكن

Breaking Point

| Break away point | Break in Point<br>نقطة تلاق |
| --- | --- |
| $K_{max}$ | $K_{min}$ |



ch. equation $\quad 1 + GH(s) = 0$

$$\boxed{GH(s) = -1}$$

$$\frac{K(s+1)}{s(s+3)(s+4)} = -1$$

$$K = -\left[\frac{s(s+3)(s+4)}{s+1}\right] = -\frac{s^3 + 7s^2 + 12s}{(s+1)}$$

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

$$= -\frac{(s+1)(3s^2+14s+12) - (s^3+7s^2+12s)(1)}{(s+1)^2} = 0$$

$$(s+1)(3s^2+14s+12) - (s^3+7s^2+12s) = 0$$

$$s^3 + 5s^2 + 7s + 6 = 0 \Rightarrow s_{1,2,3} = -3.48,\ -0.75 \pm j1.07$$

-3.48 ← أكثر منطقية.

Breaking Point at $S_b = -3.48$

← نقطة جعلت ال (2-poles) متساويين.

$$K_b\Big|_{S_b=-3.48} = -\left(\frac{s(s+3)(s+4)}{s+1}\right) = \boxed{0.35}$$

[6] Lec2

## $\boxed{5}$ Asymptotes تعتبر خطوط وهمية

← بتعرف ال (Poles) هيمشي أى إتجاه بعد مايترك ال (real Part)

→ to get it we need

① number of Asymptotes $= n - m = 3 - 1 = 2$

Where $n \rightarrow$ no. of Poles

$m \rightarrow$ no. of zeroes

② $$\sigma_c = \frac{\sum \text{Poles} - \sum \text{zero}}{n-m} = \frac{(0-3-4)-(-1)}{2} = -3$$

↳ center of Asymptotes

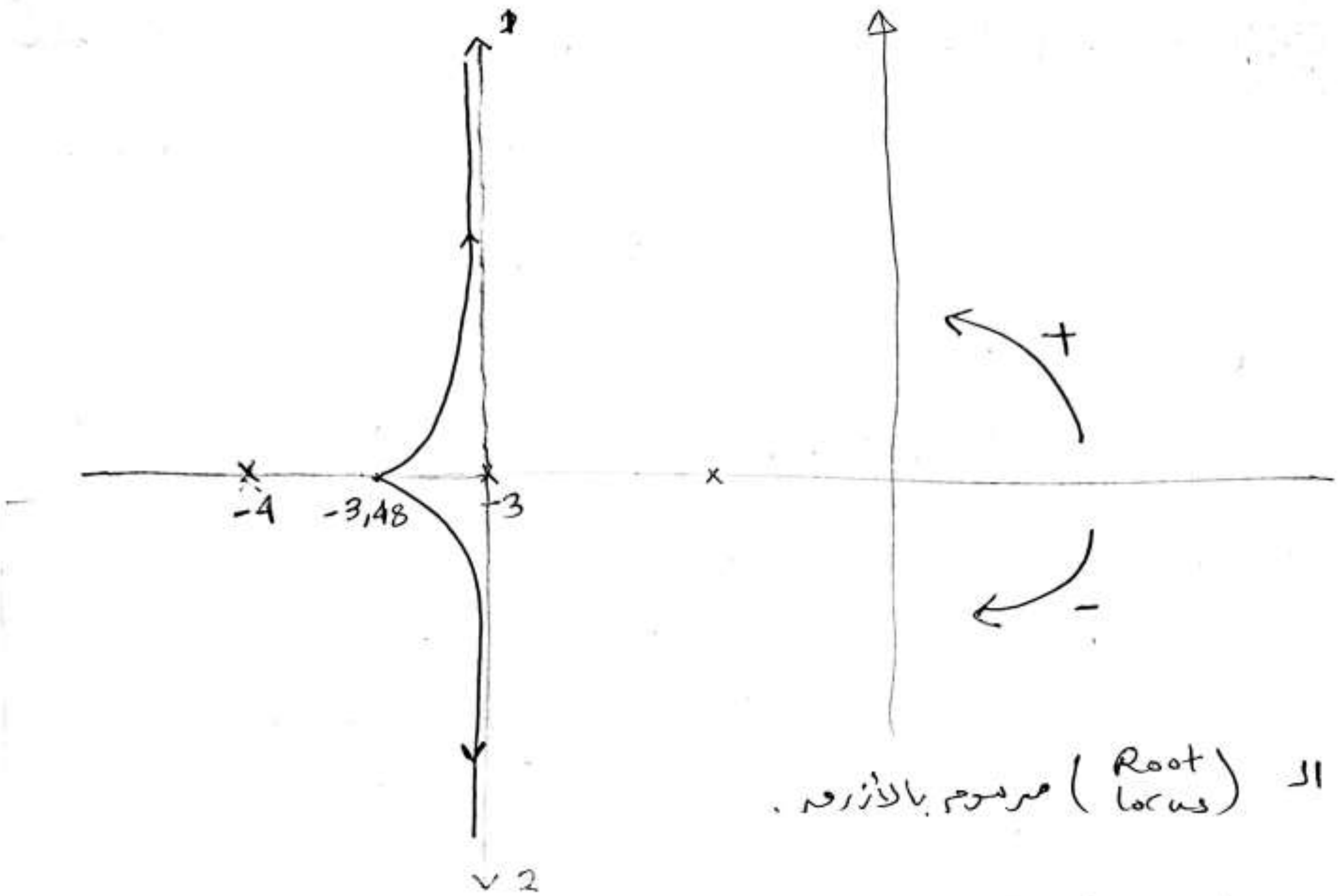
③ $$\Theta = \frac{(2L+1)180}{n-m} \qquad L = 0, 1, 2, 3, \dots$$

↳ على حسب عدد الزوايا اللى محتاجها

← هنا عندى خطين هحتاج زاويتان

$L = 0 \rightarrow \Theta_1 = +90^\circ$

$L = 1 \rightarrow \Theta_2 = 270^\circ = -90^\circ$




ال (Root locus) مرسوم بالأزرق.

~~stable sys the~~

→ system is stable for all $K > 0$

<u>Check</u> (حاجة إختيارية)

ch.eqn: $1 + G\,H(s) = 0$

$$1 + \frac{K(s+1)}{s(s+3)(s+4)} = 0$$

$$s(s+3)(s+4) + K(s+1) = 0$$

$$s^3 + 7s^2 + 12s + Ks + K = 0$$

$$s^3 + 7s^2 + (12+K)s + K = 0$$

Routh array

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 12+K \\
s^2 & 7 & K \\
s^1 & \frac{7(12+K)-K}{7} > 0 & ① \\
s^0 & K > 0 & ②
\end{array}$$

① $7(12+K) - K > 0$

$84 + 7K - K > 0$

$6K > -84$ $\qquad\qquad$ $K > -14$

② $K > 0$

→ range of stability $\boxed{K > 0}$

← لا يوجد (gain) بالسالب.

Ex:2 $GH(s) = \dfrac{K}{s(s+2)(s+5)}$

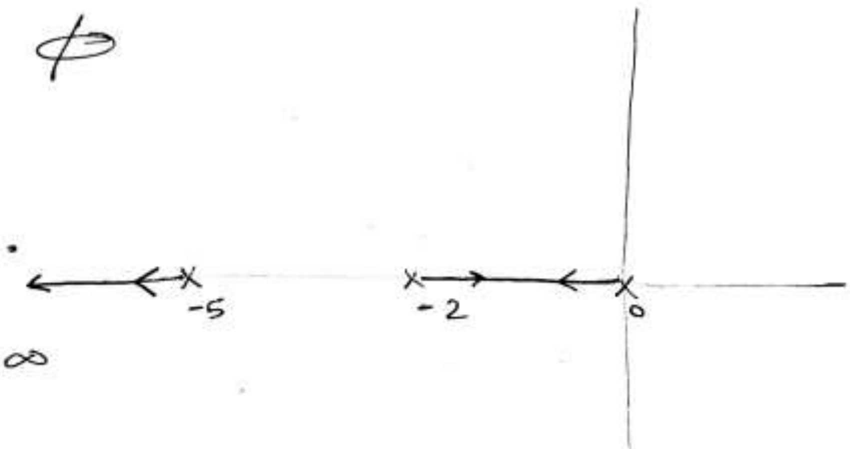
① o.L. Poles ⇒ $0, -2, -5$

o.L. zeros ⇒ $\phi$

② s-Plane

Poles → $\times$ $K=0$

Zero → $o$ $K=\infty$




Real-Part → بالترتيب

③ Real-Part → $0 \to -2$
→ $-5 \to -\infty$

④ Breaking-Point

ch. eqn ⇒ $1 + GH = 0$ ⇒ $GH(s) = -1$

$$\frac{K}{s(s+2)(s+5)} = -1 \Rightarrow K = -\,s(s+2)(s+5)$$

$$s^3 + 7s^2 + 10s$$

$\boxed{10}$ Lec2

$$\frac{dK}{ds} = 0 = -\left(3s^2 + 14s + 10\right) = 0$$

$$3s^2 + 14s + 10 = 0$$

$$s_{1,2} = -0.88 \quad \& \quad -3.78$$

✓ $\qquad$ xx

$$s_b = -0.88$$

$$K_b \Big|_{s \to s_b = -0.88} = -\left(s(s+2)(s+5)\right) = 4.06$$

## $\boxed{5}$ Asymptotes

① no. of Asymptotes $= n - m = 3 - 0 = 3$

② $$\sigma_c = \frac{\sum \text{Poles} - \sum \text{zero}}{n-m} = \frac{(0-2-5)-(0)}{3} = \frac{-7}{3}$$

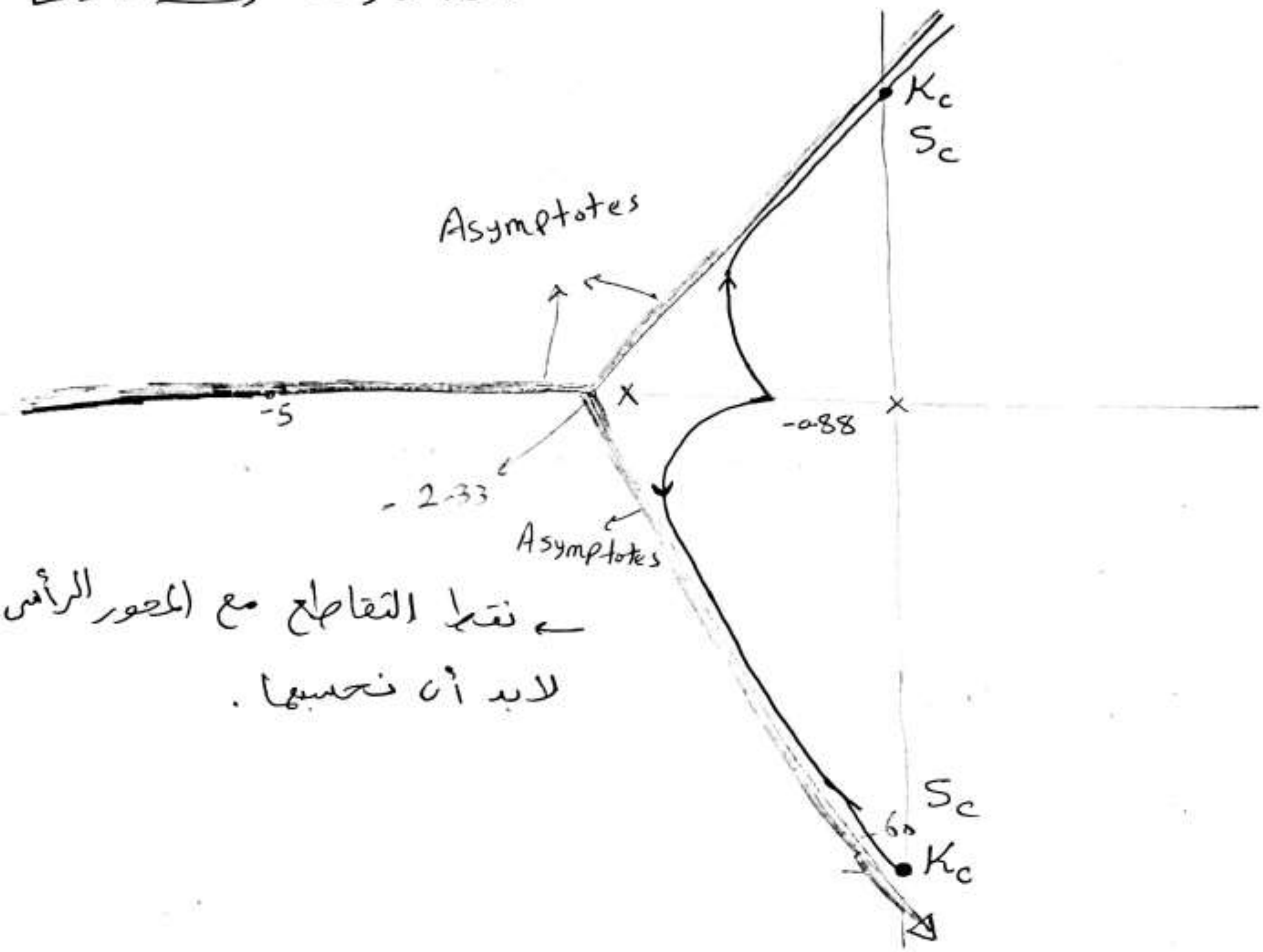
$$\sigma_c = -2.33$$

③ $$\theta = \frac{(2L+1)180}{n-m}$$

$L_1 = 0 \longrightarrow \theta_1 = 60^\circ$

$L = 1 \longrightarrow \theta_2 = 180^\circ$

$L = 2 \longrightarrow \theta_3 = 300^\circ = -60^\circ$




← نقط التقاطع مع المحور الرأسي
لابد أن نحسبها.

## 6) At imaj. axis

ch.eqn $\quad 1 + G\,H(s) = 0$

$$s(s+2)(s+5) + K = 0$$

$$s^3 + 7s^2 + 10s + K = 0$$

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 10 \\
s^2 & 7 & K \\
s^1 & \frac{70-K}{7} > 0 & \\
s^0 & K > 0 &
\end{array}
$$

← يوجد شرطان وتقاطعهما هو ما يعطي النتيجة

① $\frac{70-K}{7} > 0$

$K < 70$

② $K > 0$

Range of stability

$$\boxed{0 < K < 70}$$

at $K = 70$

The row $s \Rightarrow$ has zero's value

$$\boxed{K_c = 70}$$

جذورها هي الجذور الواقعة على المحور الرأسي.

$A(s) = 7s^2 + K_c = 0$

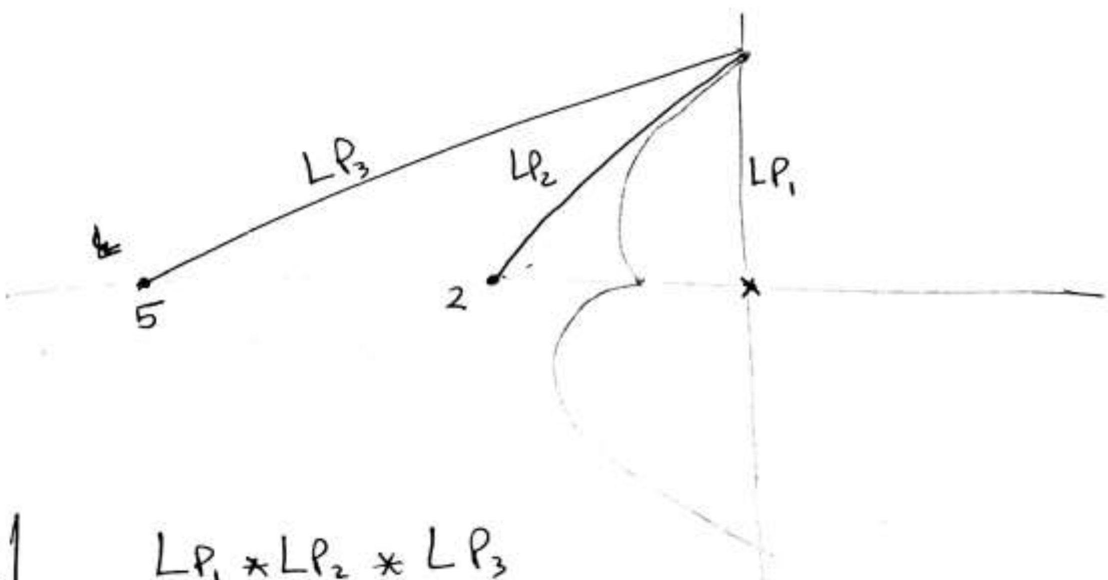
$7s^2 + 70 = 0 \longrightarrow s^2 = -10$

$$\boxed{S_c = \pm J\sqrt{10}}$$

K at point $S_o$ located on the root locus:

$$K\Big|_{S_o} = \frac{\prod \text{Poles}}{\prod \text{zeros}}$$

إثبت القانون ده (report)
ابدأ بال (ch.eqn)
هو مستنتج منها .




$$K\Big|_{S_o} = \frac{LP_1 * LP_2 * LP_3}{1}$$

---

$\boxed{EX:3}$

$$GH(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+2)}$$

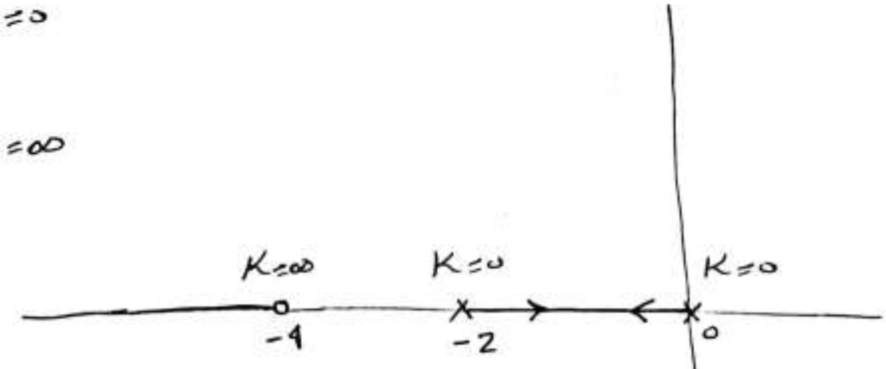
① o.L.Poles $\rightarrow 0, -2$

o.L.zeros $\rightarrow -4$

## ② s-Plane

Pole $\longrightarrow$ $\overset{K=0}{\times}$

Zero $\longrightarrow$ $\overset{K=\infty}{o}$




### Real Part

- $0 \rightarrow -2$
- $-4 \rightarrow -\infty$

ال (Zero) لايتحرك فلايعمل (Real Part)
ولذا 0 ، -2 بيروحوا ليه ويعملوا " .

## ④ Asymptotes

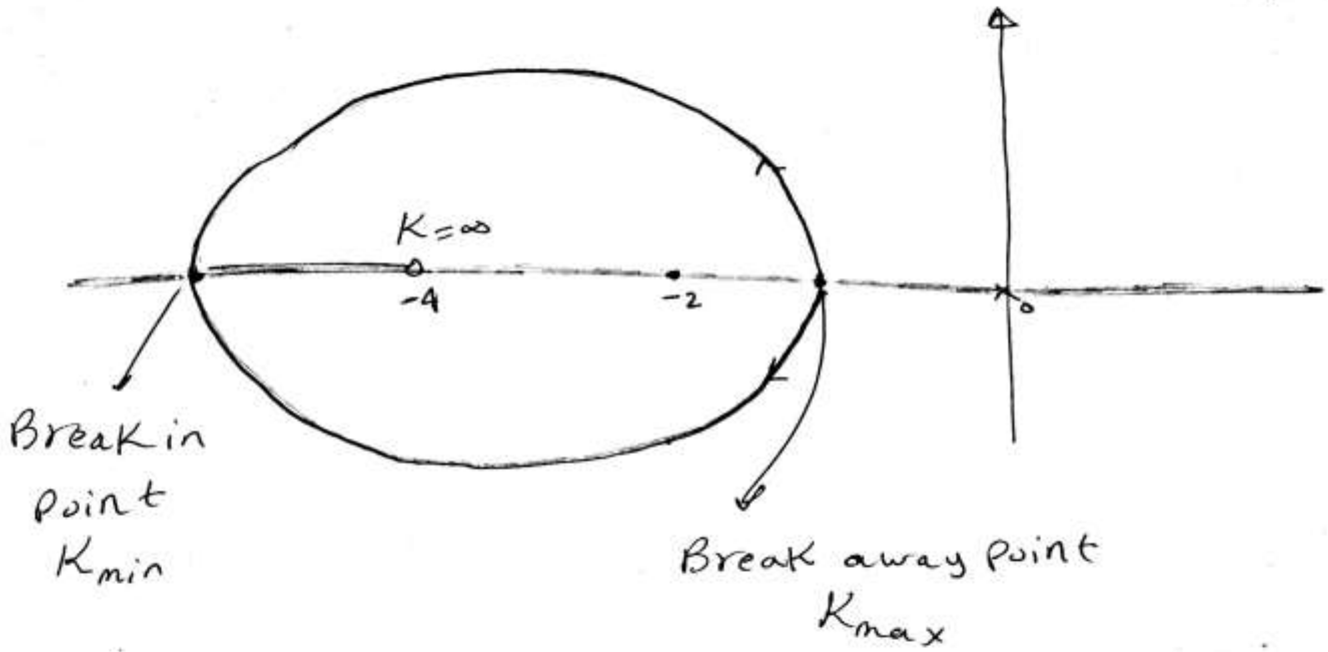
① no. of asy. $= n-m = 2-1 = 1$

② $\sigma_c = \dfrac{(0-2)-(-4)}{1} = 2$

③ $\theta = \dfrac{(2L+1)\,180}{\underbrace{n-m}_{1}}$

$L = 0 \rightarrow \theta = 180$

مش هستفيد بشيء من الخطوة
دى لأنه الخط عندى بزاوية 180.




— حدث تصادم هنا بسبب وجود الدائرة دي.

— هنجيب $K_{max}$ ، $K_{min}$ ونطرحهم من بعض هنعرف قطر الدائرة.
ونعرف نجيب المركز.

## ④ Breaking point

ch.eqn $\quad 1 + GH(s) = 0 \Rightarrow GH(s) = -1$

$$\frac{K(s+4)}{s(s+2)} = -1 \Rightarrow K = -\left[\frac{s(s+2)}{s+4}\right]$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 = -\left[\frac{(s+4)(2s+2) - (s^2+2s)}{(s+4)^2}\right] = 0$$

$$(s+4)(2s+2) - (s^2 + 2s) = 0$$

$$s^2 + 8s + 8 = 0$$

$$S_{1,2} = \underbrace{-1.17}_{\text{Break-away point}} \quad \& \quad \underbrace{-6.83}_{\text{Break-in point}}$$

Breaking point

① $S_{b_1} = -1.17 \Rightarrow K_{S_{b_1}} = 0.34$

② $S_{b_2} = -6.83 \Rightarrow K_{S_{b_2}} = 11.65$

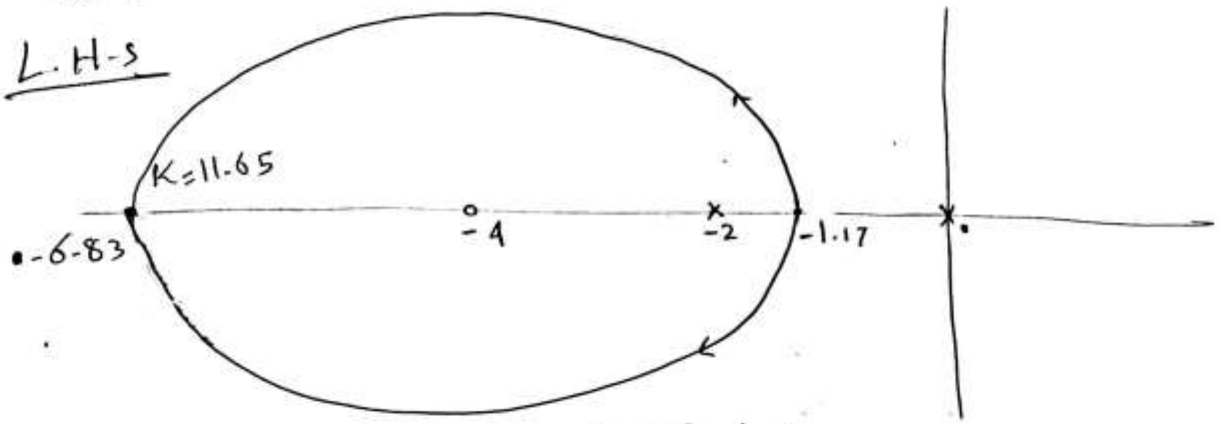
الدائرة

$$r = \frac{6.83 - 1.17}{2} = 2.83$$

مركز الدائرة

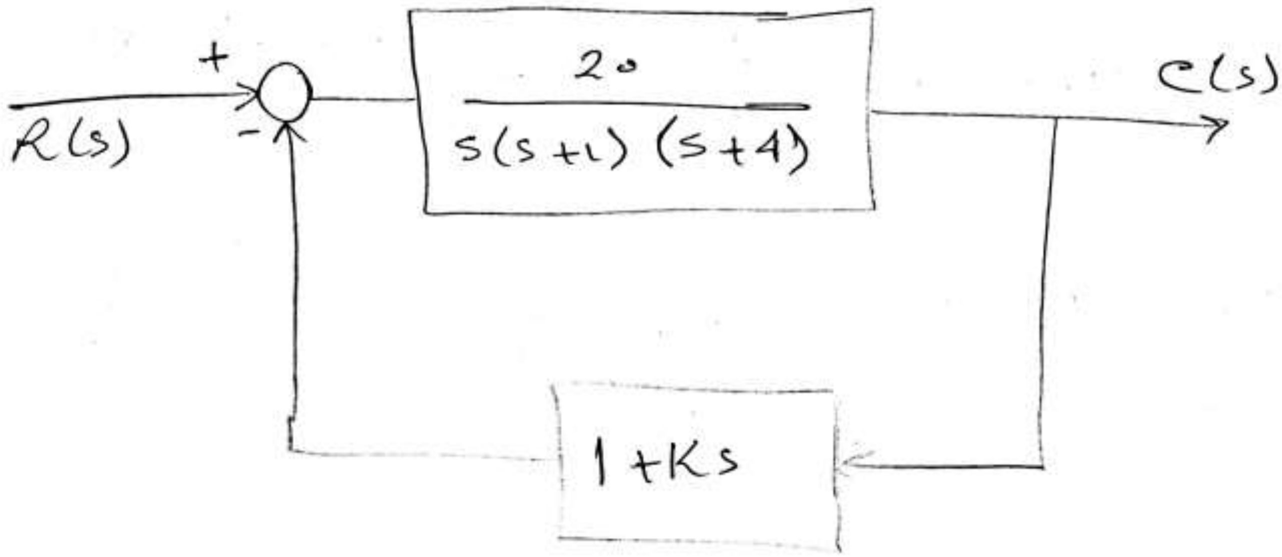
$$c = -2.83 - 1.17 = -4$$

L.H-s



System stable for all $K > 0$.

Report




→ sketch the root locus and find the range of K for stability.

$\boxed{18}$ Lec 2

← ملاحظة إن K لا تجمع على شيء، إنما تضرب في s.

← نرجع لصورة $1+GH(s)$ ونفصل ما بين K وال 3.

$$GH(s) = \frac{(K+3)\,3}{(s+3)(s+2)}$$

نعوض $\tilde{K} = 20K$

$$\text{or} = \frac{20K(s+2)}{(s+4)(s+5)}$$